

LA TEORIA DELLO STRATO LIMITE (*)

11.1 - Il concetto di STRATO LIMITE è stato proposto per la prima volta da Prandtl nel 1904 e rappresenta uno dei più significativi contributi forniti alla meccanica dei fluidi per la risoluzione di problemi di moto di fluidi a bassa viscosità - come l'aria, l'acqua - e con elevati numeri di Reynolds. Per chiarire tale concetto consideriamo il campo di moto individuato da un fluido nelle condizioni predette che, provenendo da una regione a rotazione nulla - come una regione in moto uniforme - investe un corpo bidimensionale opportunamente profilato (fig. 11.1). Il moto può essere considerato essenzialmente non dissipativo ed irrotazionale in tutto il campo (forze viscosse trascurabili rispetto alle forze d'inerzia) ad esclusione di un sottile strato a contatto con la superficie del corpo - lo strato limite - nel quale il moto è fortemente dissipativo e rotazionale in quanto in tale strato le componenti tangenziali della velocità, passando rapidamente dal valore zero alla superficie del corpo (condizione di aderenza) ai valori locali del moto a potenziale esterno, presentano forti gradienti normali che danno luogo ad elevate tensioni tangenziali (forze viscosse e, più in generale, forze d'attrito interno al fluido non trascurabili rispetto alle forze d'inerzia). Al di fuori dello strato limite, il moto può quindi essere descritto dalle eq.ni relative ai fluidi ideali in moto a potenziale (V. Cap. 7), mentre entro lo strato limite il moto è regolato dalle eq.ni relative ai fluidi reali

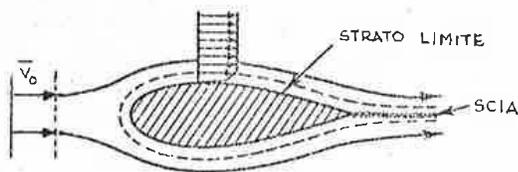


Fig. 11.1

(V. Cap. 8,10). La fig. 11.1 indica un moto esterno; in relazione alla forma del corpo - che condiziona lo andamento della pressione nella direzione del moto - lo strato limite può separarsi dalla superficie del corpo stesso, dando luogo ad una scia (regione di vortici).

La fig. 8.3 del Cap. 8 indica un moto interno; il moto a potenziale è presente solamente nella zona in cui lo strato limite non è ancora completamente sviluppato (tratto i-

niziale della condotta); a valle di questa zona lo strato occupa l'intera sezione della condotta e la velocità assume la distribuzione definitiva.

(*) - Stesura del prof.ing. Giulio Scarsi

11.2 - La natura del moto entro lo strato limite può essere analizzata facendo riferimento ad una sottile piastra piana liscia investita da un fluido in moto uniforme con velocità v_0 nella direzione della piastra stessa (fig. 11.2). Lo strato limite sulla piastra inizia a formarsi a partire dal

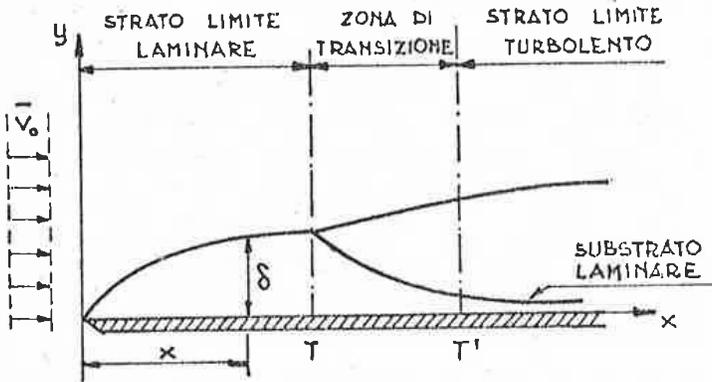


Fig. 11.2

bordo di ingresso e aumenta di spessore procedendo nella direzione del moto (*); convenzionalmente si definisce come SPESSORE δ DELLO STRATO LIMITE la distanza dalla piastra (e più in generale dalla superficie del corpo in esame) alla quale il valore della velocità entro tale strato raggiunge il 99% del valore della velocità locale del moto a potenziale esterno.

Lo strato limite presenta: (i) un primo tratto, che giunge sino alla sezione T, in cui il moto è interamente laminare (strato limite laminare); (ii) un secondo tratto, che inizia dalla sezione T e termina alla sezione T', in cui il moto è in parte laminare e in parte turbolento (zona di transizione); (iii) un terzo tratto, che inizia dalla sezione T', in cui il moto è interamente turbolento (strato limite turbolento) ad esclusione di un sottilissimo film, il substrato laminare, aderente alla piastra. In ogni caso, la velocità di trasporto presenta una sola componente significativa nella direzione dell'asse x, in quanto le linee di corrente si mantengono sensibilmente parallele a tale direzione (moto di trasporto unidirezionale).

Esaminiamo alcuni aspetti caratteristici:

a) come mostra la fig. 11.3 la distribuzione della velocità di trasporto entro lo strato limite turbolento risulta più uniforme della distribuzione della velocità entro lo strato limite laminare, ma presenta un più forte gradiente normale di velocità in corrispondenza alla superficie della piastra, cioè per $y \rightarrow 0$, dove si localizza il substrato laminare. Di conseguenza le tensioni tangenziali τ_0 sulla piastra (tensioni in ogni caso viscosi), date dalla eq.ne di Newton

$$(11.1) \quad \tau_0 = p_{yx} = -\mu v_{x,y}$$

sono più alte nelle condizioni di strato limite turbolento.

b) il meccanismo del trasferimento della quantità di moto dall'ester

(*) - Nella fig. 11.2 è riportato lo strato limite relativo alla superficie superiore della piastra; lo strato limite relativo alla superficie inferiore è ovviamente il simmetrico del precedente.

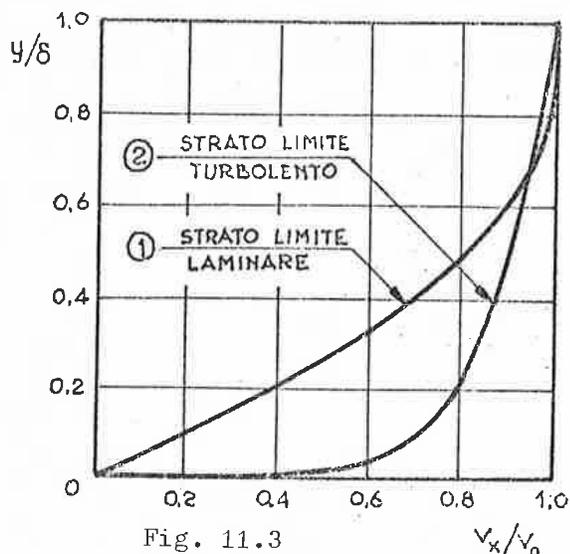


Fig. 11.3

passa progressivamente dalla forma di tipo (1) alla forma di tipo (2) di fig. 11.3. La sezione T (fig. 11.2) è chiamata sezione di transizione ed è individuata dall'ascissa x corrispondente ad un valore critico (dell'ordine di 5×10^5) del numero di Reynolds Re_x relativo allo strato limite e definito dalla relazione

$$(11.2) \quad Re_x = \frac{v_0 x}{\nu}$$

essendo ν la viscosità cinematica del fluido;

d) lo strato limite che si forma sulla lastra piana non presenta il fenomeno della separazione. La separazione può avvenire solamente quando entro lo strato limite il gradiente di pressione nella direzione del moto è positivo (V. par. 11.7): per la lastra piana tale gradiente è nullo.

11.3 - LE EQUAZIONI SEMPLIFICATE DEL MOTO ENTRO LO STRATO LIMITE. SOLUZIONI ESATTE. Tali eq.ni vengono ricavate nelle condizioni di fluido incompressibile, moto piano permanente: il fluido proviene da una regione in moto uniforme e investe un corpo bidimensionale delimitato da superficie piane, come è indicato nella fig. 11.4 nella quale si è assunto come piano del moto il piano orizzontale xy .

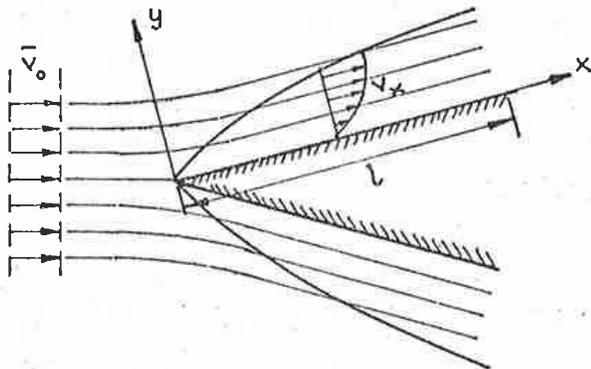


Fig. 11.4

no allo strato limite è più attivo se lo strato limite è turbolento; di conseguenza per tale strato lo spessore δ aumenta con x più rapidamente di quanto avviene per lo strato limite laminare (δ proporz. a $x^{1/2}$ per lo strato limite laminare, δ proporz. $x^{4/5}$ per lo strato limite turbolento);

c) nella zona di transizione la distribuzione della velocità di trasporto

Si esaminano separatamente i due casi di strato limite laminare, nel quale le forze di attrito interno sono dovute alle tensioni tangenziali viscose, e di strato limite turbolento, nel quale le forze di attrito interno sono dovute prevalentemente alle tensioni tangenziali di origine turbolenta. In entrambi i casi tali forze hanno lo stesso ordine di grandezza delle forze di inerzia.

A) Strato limite laminare
L'eq.ne vettoriale del moto en-

tro lo strato limite è l'eq.ne (8.16) di Navier-Stokes che nelle condizioni poste fornisce le due eq.ni scalari

$$(11.3) \quad \frac{1}{\varrho} p_{,x} = - \left(v_x v_{x,x} + v_y v_{x,y} \right) + \nu (v_{x,xx} + v_{x,yy})$$

$$(11.4) \quad \frac{1}{\varrho} p_{,y} = - \left(v_x v_{y,x} + v_y v_{y,y} \right) + \nu (v_{y,xx} + v_{y,yy})$$

mentre l'eq.ne di continuità e l'eq.ne di stato risultano

$$(11.5) \quad v_{x,x} + v_{y,y} = 0 ; \quad \varrho = \text{cost}$$

Le eq.ni differenziali (11.3), (11.4) non sono lineari e non possono essere integrate nella forma completa indicata. Mediante l'analisi degli ordini di grandezza dei termini che in esse compaiono è possibile semplificarle, trascurando alcuni termini rispetto agli altri. Si perviene ad una unica eq.ne differenziale che è ancora non lineare: essa tuttavia fornisce importanti indicazioni sull'andamento della pressione lungo lo strato limite e, in alcuni casi, può essere integrata.

Assumiamo come unitari gli ordini di grandezza della componente tangenziale della velocità v_x ($v_x \leq v_0$) e della distanza x ($x \leq l$), cioè $v_x = O(1)$ e $x = O(1)$. La y ($0 \leq y \leq \delta$) presenta l'ordine di grandezza dello spessore dello strato limite, cioè $y = O(\delta)$, e poichè risulta $y \ll x$ (*) si ha $O(\delta) \ll O(1)$. Segue:

$$\begin{aligned} v_{x,x} &= O(1) ; & v_{x,xx} &= O(1) \\ v_{x,y} &= O(1/\delta) ; & v_{x,yy} &= O(1/\delta^2) \end{aligned}$$

Inoltre, dall'eq.ne di continuità si deduce

$$v_{y,y} = -v_{x,x} = O(1)$$

e quindi v_y ha lo stesso ordine di grandezza di δ , cioè $v_y = O(\delta)$. Risultata:

$$\begin{aligned} v_{y,y} &= O(1) ; & v_{y,yy} &= O(1/\delta) \\ v_{y,x} &= O(\delta) ; & v_{y,xx} &= O(\delta) \end{aligned}$$

Riscriviamo le eq.ni (11.3), (11.4) indicando gli ordini di grandezza dei termini esaminati:

$$(11.6) \quad \frac{1}{\varrho} p_{,x} = - \left(\underset{\substack{\downarrow \\ 1.1=1}}{v_x v_{x,x}} + \underset{\substack{\downarrow \\ \delta \cdot 1/\delta = 1}}{v_y v_{x,y}} \right) + \nu \left(\underset{\downarrow}{v_{x,xx}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 1/\delta^2}}{v_{x,yy}} \right)$$

(*) - Si esclude naturalmente la zona iniziale dello strato limite dove $x \rightarrow 0$.

$$(11.7) \quad \frac{1}{\rho} p_{,y} = - \left(\underset{\substack{\downarrow \\ 1 \cdot \delta = \delta}}{v_x v_{y,x}} + \underset{\substack{\downarrow \\ \delta \cdot 1 = \delta}}{v_y v_{y,y}} \right) + \nu \left(\underset{\downarrow}{v_{y,xx}} + \underset{\downarrow}{v_{y,yy}} \right)$$

Nella eq.ne (11.6):

il termine $v_{x,xx} = O(1)$ è senz'altro trascurabile rispetto al termine $v_{x,yy} = O(1/\delta^2) \gg O(1)$;

il termine $\nu v_{x,yy}$, che rappresenta le forze viscosse per unità di massa , per essere conservato deve avere lo stesso ordine di grandezza dei termini $v_x v_{x,x}$ e $v_y v_{x,y}$ che costituiscono le forze di inerzia per unità di massa, cioè $\nu v_{x,yy} = O(1)$, $\nu = O(\delta^2)$ (fluido a bassa viscosità) ;

il termine $(1/\rho) p_{,x}$ ha, al massimo, lo stesso ordine di grandezza dei termini a secondo membro, cioè $(1/\rho) p_{,x} = O(1)$.

Nella eq.ne (11.7):

il termine $v_{y,xx} = O(\delta)$ è senz'altro trascurabile rispetto al termine $v_{y,yy} = O(1/\delta) \gg O(\delta)$;

il termine $\nu v_{y,yy}$, tenendo presente l'ordine di grandezza di ν , ha l'ordine di grandezza di δ , cioè $\nu v_{y,yy} = O(\delta)$;

il termine $(1/\rho) p_{,y}$ ha al massimo l'ordine di grandezza dei termini a secondo membro, cioè $(1/\rho) p_{,y} = O(\delta)$. Di conseguenza la variazione della pressione con y nello strato limite è trascurabile rispetto alla variazione della pressione con x espressa dalla (11.7) e le eq.ni scalari del moto (11.3), (11.4) si riducono alla sola eq.ne

$$(11.8) \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = - \left(v_x v_{x,x} + v_y v_{x,y} \right) + \nu v_{x,yy}$$

che rappresenta l'EQ.NE SEMPLIFICATA DEL MOTO ENTRO LO STRATO LIMITE LAMINARE. Tale eq.ne evidenzia un aspetto molto importante: entro lo strato limite la pressione p (nell'ordine di approssimazione considerato) dipende dalla so la coordinata x e presenta valori noti in quanto, rimanendo costante con y , conserva in ogni sezione il valore che essa assume immediatamente al di fuori dello strato limite, nella regione del moto a potenziale dove è calcolabile per mezzo dell'eq.ne di Bernoulli.

L'eq.ne (11.8), associata alle eq.ni (11.5) e alle condizioni al con torno può essere, in alcuni casi, integrata fornendo soluzioni "esatte". Tra queste si ricordano le soluzioni relative allo strato limite su: una lastra piana (soluzione di Blasius riportata nell'Appendice 6), su un corpo a cuneo (soluzione di Falkner, Stan, Hartree), sulle pareti di un canale convergente.

B) Strato limite turbolento

L'eq.ne vettoriale del moto entro lo strato limite è l'eq.ne (10.21)

di Reynolds che, nelle condizioni poste, fornisce le due eq.ni scalari (*)

$$(11.9) \quad \frac{1}{\rho} p_{,x} = - \left(v_x v_{x,x} + v_y v_{x,y} \right) + \nu (v_{x,xx} + v_{x,yy}) - \langle u'^2 \rangle_{,x} - \langle u'v' \rangle_{,y}$$

$$(11.10) \quad \frac{1}{\rho} p_{,y} = - \left(v_x v_{y,x} + v_y v_{y,y} \right) + \nu (v_{y,xx} + v_{y,yy}) - \langle u'v' \rangle_{,x} - \langle v'^2 \rangle_{,y}$$

mentre l'eq.ne di continuità e l'eq.ne di stato risultano ancora

$$(11.11) \quad v_{x,x} + v_{y,y} = 0 \quad ; \quad \rho = \text{cost}$$

Nel substrato laminare le eq.ni (11.9), (11.10) si riducono alle eq.ni (11.3), (11.4) in quanto $u' = v' = 0$, mentre nel nucleo turbolento, dove le forze dovute alle ^{tensioni} tangenziali viscosi sono trascurabili rispetto alle forze dovute alle tensioni tangenziali turbolente, nelle eq.ni (11.9), (11.10) svaniscono i termini contenenti ν , cioè

$$(11.12) \quad \frac{1}{\rho} p_{,x} = - \left(v_x v_{x,x} + v_y v_{x,y} \right) - \langle u'^2 \rangle_{,x} - \langle u'v' \rangle_{,y}$$

$$(11.13) \quad \frac{1}{\rho} p_{,y} = - \left(v_x v_{y,x} + v_y v_{y,y} \right) - \langle u'v' \rangle_{,x} - \langle v'^2 \rangle_{,y}$$

Normalmente i termini della eq.ne (11.13) sono trascurabili rispetto ai termini della eq.ne (11.12) (e quindi variazione della p con y trascurabile rispetto alla variazione con x) per cui in generale si considera solamente quest'ultima eq.ne nella quale, inoltre, non si tiene conto del termine $\langle u'^2 \rangle_{,x}$, trascurabile rispetto agli altri termini. Tale EQ.NE SEMPLIFICATA, associata alle eq.ni (11.11) e alle condizioni al contorno non fornisce soluzioni "esatte" in quanto per essere integrata necessita in ogni caso di ulteriori semplificazioni e di schemi fenomenologici (si veda, ad esempio, la teoria della lunghezza di mescolamento di Prandtl).

11.4 - Le eq.ni semplificate del moto entro gli strati limite laminare e turbolento possono essere estese ai corpi bidimensionali delimitati da SUPERFICIE CURVE, introducendo un sistema di coordinate curvilinee nel quale l'asse x è situa-

(*) - Con v_x , v_y si intendono le componenti della velocità di trasporto, cioè $v_x = \langle v_x \rangle$, $v_y = \langle v_y \rangle$, e con p la pressione mediata nel periodo di turbolenza, cioè $p = \langle p \rangle$; u' , v' sono le componenti di velocità di agitazione turbolenta.

to sulla superficie curva del corpo e l'asse y è sempre perpendicolare alla superficie stessa. Si può dimostrare (*) che tale estensione non modifica la forma delle eq.ni se la superficie curva ha in ogni punto un raggio di curvatura molto elevato rispetto allo spessore dello strato limite.

11.5 - L'EQ.NE DELLA QUANTITA' DI MOTO DELLO STRATO LIMITE. SOLUZIONI APPROSSIMATE. Per calcolare l'andamento dello spessore δ dello strato limite e la distribuzione delle tensioni tangenziali τ_o su corpi delimitati da superficie piane, T.v. Kàrmàn ha proposto un metodo basato sull'applicazione diretta del principio della quantità di moto ad un volume di controllo comprendente parte dello strato limite che si sviluppa sulle superficie stesse e relativo ad un fluido incompressibile in moto piano permanente. Qui si considera una sottile piastra piana liscia investita da un moto uniforme (velocità v_o) con angolo di attacco nullo come è indicato nella fig. 11.5; in questa condizione non esiste gradiente di pressione (oltre che nella direzione y) nella direzione x , cioè $dp/dx = 0$. Il piano del moto è il piano

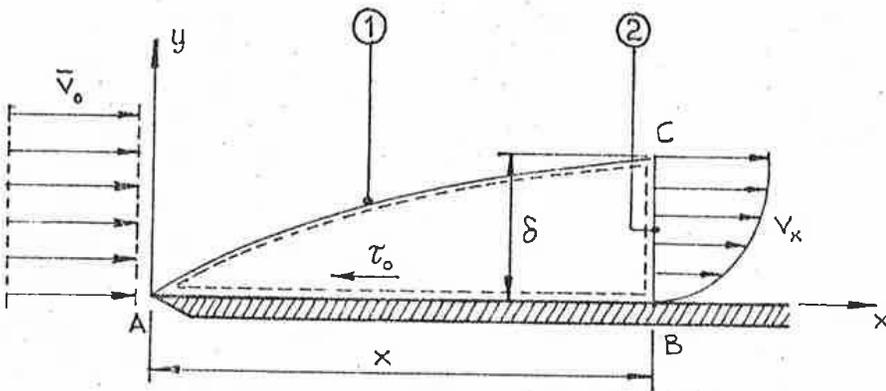


Fig. 11.5

BC è eguale alla massa m_1 che nell'unità di tempo entra nel volume di controllo attraverso la superficie AC, cioè

$$(11.14) \quad \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \rho \int_0^{\delta} v_x dy \quad \text{con} \quad \delta = \delta(x)$$

Tenendo presente questa relazione, l'eq.ne vettoriale (5.4) che esprime il principio della quantità di moto, fornisce, proiettata nella direzione x (orizzontale)

$$(11.15) \quad - \int_0^x \tau_o dx = \rho \int_0^{\delta} v_x^2 dy - \rho \int_0^{\delta} v_o v_x dy$$

essendo:

$-\int_0^x \tau_o dx$ la sola forza di superficie (forza di attrito) agente sul fluido, dovuta alle tensioni tangenziali $\tau_o = \tau_o(x)$ che si hanno in corrispondenza della piastra;

(*) - V. ad es.: Shi-I Pai: "Viscous flow theory", vol. I Van Nostrand C. Inc., 1956, pag. 137 .

$\varrho \int_0^{\delta} v_x^2 dy$ la quantità di moto che attraversa, nell'unità di tempo e nella direzione x , la sezione BC (quantità di moto uscente dal volume di controllo);

$\varrho \int_0^{\delta} v_0 v_x dy$ la quantità di moto che attraversa, nell'unità di tempo e nella direzione x , la superficie AC (quantità di moto entrante nel volume di controllo con componente orizzontale di velocità v_0).

L'eq.ne (11.15) può essere riscritta nella forma equivalente

$$\int_0^x \tau_0 dx = \varrho v_0^2 \delta \int_0^1 \frac{v_x}{v_0} \left(1 - \frac{v_x}{v_0}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

che, dopo una derivazione totale rispetto ad x , si trasforma nella

$$(11.16) \quad \tau_0 = \varrho v_0^2 \frac{d}{dx} \left[\delta \int_0^1 \frac{v_x}{v_0} \left(1 - \frac{v_x}{v_0}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \right].$$

La (11.16) è una forma dell'eq.ne della quantità di moto ~~dello~~ ^{che per} strato limite laminare ~~sia~~ ^{che per} strato limite turbolento su lastra piana (*).

Per calcolare l'integrale al secondo membro della eq.ne (11.16) è necessario precisare la funzione v_x/v_0 . In generale, si ritiene che tale funzione incognita dipenda solamente da y/δ (distribuzioni delle velocità "simili" per ogni valore di x), cioè

$$(11.17) \quad v_x/v_0 = f(y/\delta)$$

e si assume per $f(y/\delta)$ una eq.ne "appropriata" che verifichi le condizioni al contorno. Individuato con la eq.ne (11.17) il valore dell'integrale, per determinare le funzioni $\delta = \delta(x)$ e $\tau_0 = \tau_0(x)$ è necessario associare alla eq.ne (11.16) una ulteriore relazione fra le funzioni predette. Le soluzioni che si ottengono sono approssimate nei limiti di validità della scelta della funzione $f(y/\delta)$.

A) Strato limite laminare su lastra piana

Assumiamo per la funzione $v_x/v_0 = f(y/\delta)$ l'eq.ne

$$(11.18) \quad \frac{v_x}{v_0} = 2 \left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

che verifica le condizioni al contorno e che fornisce

$$\int_0^1 \frac{v_x}{v_0} \left(1 - \frac{v_x}{v_0}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{2}{15}$$

(*) - Nel caso di strato limite turbolento la v_x rappresenta la componente della velocità di trasporto, cioè $v_x = \langle v_x \rangle$.

Tenendo presente la relazione precedente, l'eq.ne (11.16) si particolarizza nella seguente

$$(11.19) \quad \tau_0 = \frac{2}{15} \rho v_0^2 \frac{d\delta}{dx}$$

alla quale si associa l'eq.ne di Newton (*)

$$(11.20) \quad \tau_0 = \mu (v_{x,y})_{y=0} = \mu \frac{v_0}{\delta} \left[\frac{\partial (v_x/v_0)}{\partial (y/\delta)} \right]_{y/\delta = 0}$$

che con l'eq.ne (11.18) si particolarizza nella

$$(11.21) \quad \tau_0 = 2 \mu \frac{v_0}{\delta}$$

Dal confronto delle eq.ni (11.19), (11.21) si ottiene una eq.ne differenziale in δ che, integrata con la condizione al contorno $\delta = 0$ per $x = 0$, fornisce

$$(11.22) \quad \delta = 5,48 \sqrt{\mu x / \rho v_0} = 5,48 x / \sqrt{Re_x}$$

cioè lo spessore δ dello strato limite cresce con la radice quadrata della distanza x (Re_x è il numero di Reynolds locale entro lo strato limite). La tensione tangenziale τ_0 lungo la piastra può essere ottenuta sostituendo l'eq.ne (11.22) nella eq.ne (11.21). Si ha

$$(11.23) \quad \tau_0 = \frac{2 \mu v_0}{5,48 \sqrt{\mu x / \rho v_0}} = 0,365 \rho v_0^2 / \sqrt{Re_x}$$

cioè τ_0 è inversamente proporzionale alla radice quadrata della distanza x . La forza totale di attrito R su un lato della piastra di lunghezza L e di larghezza unitaria risulta

$$(11.24) \quad R = \int_0^L \tau_0 dx = 0,73 \sqrt{\rho \mu v_0^2} L = \frac{1,46}{\sqrt{Re_L}} \frac{\rho v_0^2}{2} L$$

Tale forza (diretta in senso contrario all'asse x) rappresenta la forza resistente che si oppone al movimento del fluido lungo la piastra. Essa può essere espressa attraverso il coefficiente di resistenza C_R definito da

$$(11.25) \quad C_R = \frac{R}{L \rho v_0^2 / 2}$$

(*) - Nella eq.ne (11.20) compare a secondo membro il segno positivo in quanto la τ_0 è stata già assunta con senso contrario a quello del moto (V. fig. 11.5).

e risulta

$$R = C_R \cdot \rho \frac{v_0^2}{2} L$$

con

$$(11.26) \quad C_R = 1,46 / \sqrt{Re_L}$$

L'eq.ne (11.26) è riportata nel diagramma bilogarithmico di fig. 11.6 dove è rappresentata da una retta. Lo strato limite laminare si mantiene per $Re_L \leq 5 \cdot 10^5$.

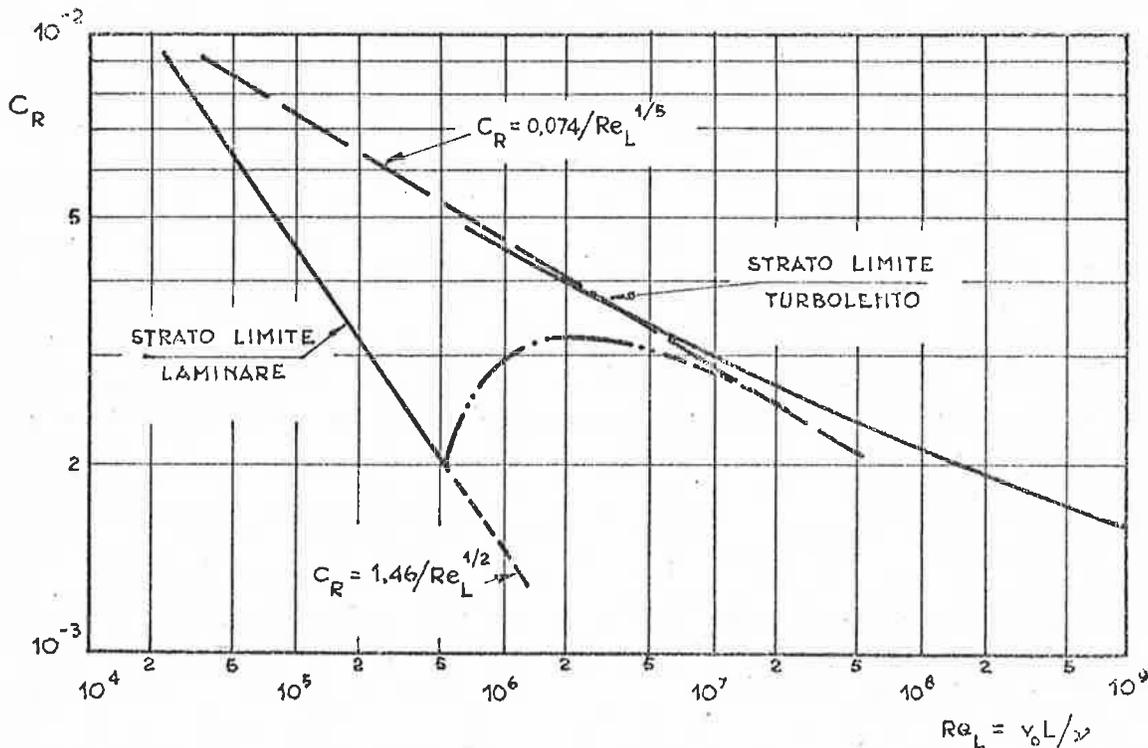


Fig. 11.6

B) Strato limite turbolento su lastra piana. Parete liscia

Per determinare le caratteristiche dello strato limite turbolento si procede in modo analogo a quello seguito per lo strato limite laminare. Esiste tutta via una importante differenza: nel caso presente la tensione tangenziale τ_0 non può essere determinata per mezzo dell'eq.ne di Newton (11.21) in quanto, scelta la funzione $v_x/v_0 = f(y/\delta)$, questa è in generale "appropriata" per il solo nucleo turbolento e non può essere estesa al substrato laminare che si forma a contatto con la piastra e per il quale è valida l'eq.ne (11.20). L'ulteriore legame tra τ_0 e δ da associare alla eq.ne (11.16) deve quindi essere ricavato per altra via.

Assumiamo per la funzione $v_x/v_0 = f(y/\delta)$ entro il nucleo turbolen

to l'eq.ne (10.37) (legge delle potenze) particolarizzata con l'esponente $n = 1/7$, cioè

$$(11.27) \quad \frac{v_x}{v_0} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$$

che fornisce

$$\int_0^1 \frac{v_x}{v_0} \left(1 - \frac{v_x}{v_0}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{7}{72}$$

Con questa relazione, l'eq.ne (11.16) si particolarizza nella

$$(11.28) \quad \tau_0 = \frac{7}{72} \rho v_0^2 \frac{d\delta}{dx}$$

alla quale si associa l'eq.ne

$$(11.29) \quad \tau_0 = 0,0225 \rho v_0^2 \left(\frac{\mu}{\rho v_0 \delta}\right)^{1/4}$$

dedotta dalla legge delle potenze nella forma (10.42) (V. Cap. 10) con $y = \delta$ e $v = v_0$.

Dal confronto delle eq.ni (11.28) (11.29) si ottiene una eq.ne differenziale in δ che, integrata con la condizione al contorno $\delta = 0$ per $x = 0$ (*) fornisce

$$(11.30) \quad \delta = 0,37 x^{4/5} \left(\frac{\mu}{\rho v_0}\right)^{1/5} = 0,37 x / \text{Re}_x^{4/5}$$

cioè lo spessore dello strato limite cresce con $x^{4/5}$ e quindi si incrementa più rapidamente di quanto si verifichi per lo strato limite laminare. La tensione tangenziale τ_0 lungo la piastra può essere ottenuta sostituendo l'eq.ne (11.30) nella eq.ne (11.29). Si ha

$$(11.31) \quad \tau_0 = 0,0592 \rho \frac{v_0^2}{2} \left(\frac{\mu}{\rho v_0 x}\right)^{1/5} = 0,0592 \rho \frac{v_0^2}{2} / (\text{Re}_x)^{1/5}$$

cioè τ_0 è inversamente proporzionale a $x^{1/5}$.

La forza totale di attrito R su un lato della piastra di lunghezza L e di larghezza unitaria risulta

$$(11.32) \quad R = \int_0^L \tau_0 dx = \frac{0,074}{(\text{Re}_L)^{1/5}} \frac{\rho v_0^2}{2} L$$

(*) - In effetti lo strato limite turbolento inizia dopo la zona di transizione e quindi per valori di x e δ diversi da zero. Tuttavia sia la posizione di tale zona sia lo spessore iniziale dello strato limite turbolento sono di difficile determinazione per cui si adotta, in prima approssimazione, la condizione al contorno indicata.

e il coefficiente di resistenza C_R è dato da

$$(11.33) \quad C_R = 0,074 / (Re_L)^{1/5}$$

L'eq.ne (11.33) è rappresentata nel diagramma bilogarithmico di fig. 11.6 e per $5 \times 10^5 < Re_L < 10^7$ è in buon accordo con rilievi sperimentali. Per $Re_L > 10^7$ Schlichting, utilizzando una forma logaritmica per la funzione v_x/v_o ha ottenuto

$$C_R = 0,455 (\log Re_L)^{-2,58}$$

che è in buon accordo con dati sperimentali sino a $Re_L \simeq 10^9$.

11.6 - L'eq.ne (11.16) può essere generalizzata al caso in cui il gradiente di pressione dp/dx è diverso da zero. Risulta, come è facile verificare,

$$(11.35) \quad \tau_o + \delta \frac{dp}{dx} = \rho v_o^2 \frac{d}{dx} \left[\delta \int_0^1 \frac{v_x}{v_o} \left(1 - \frac{v_x}{v_o}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \right].$$

L'eq.ne (11.35) è inoltre valida anche per corpi bidimensionali delimitati da superficie curve purchè siano verificate le condizioni già introdotte per la estensione a tali corpi delle eq.ni semplificate dello strato limite (V. par. 11.4).

Soluzioni della eq.ne (11.35) possono essere ottenute mediante metodi particolari riportati su testi specializzati.

11.7 - LA SEPARAZIONE DELLO STRATO LIMITE. Se il gradiente di pressione nella direzione x del moto è:

(a) nullo, cioè $dp/dx = 0$, lo spessore δ dello strato limite si incrementa con x secondo leggi che dipendono dal regime di moto che si realizza nello strato limite stesso (V. ad esempio le eq.ni 11.22 e 11.30);

(b) negativo, cioè $dp/dx < 0$, il decremento di pressione tende a contrapporsi parzialmente all'azione ritardante delle tensioni tangenziali con la conseguenza di ridurre lo spessore dello strato limite rispetto a quello relativo, a parità di regime di moto, alla situazione $dp/dx = 0$;

(c) positivo, cioè $dp/dx > 0$, l'incremento di pressione agisce nello stesso senso delle tensioni tangenziali con la conseguenza di aumentare lo spessore dello strato limite rispetto a quello relativo, a parità di regime di moto, alla situazione $dp/dx = 0$.

Consideriamo il caso (c): poichè le tensioni tangenziali sono particolarmente intense nella zona a contatto con la superficie del corpo, il moto in tale zona può risultare, per la contemporanea presenza del gradiente positivo di pressione, fortemente decelerata e può essere costretto ad invertire il suo senso, provocando la SEPARAZIONE dello strato limite dalla superficie del corpo, come illustra la fig. 11.7. A valle del punto di separazione, in corrispondenza del quale la tangente al diagramma delle velocità v_x è perpendico

lare alla superfi-
cie del corpo, cioè

$$(11.36) \left(\frac{v_x}{y} \right)_{y=0} = 0$$

l'inversione del mo-
to provoca la forma-
zione della SCIA
(zona di vortici).
Nella regione di
scia, la pressione
si mantiene pratica-
mente costante e pa-
ri al valore che es-
sa assume in corri-
spondenza del punto
di separazione.

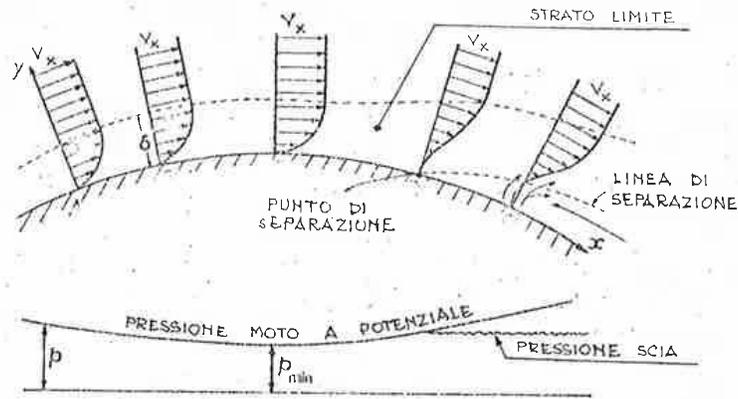


Fig. 11.7

La separazione può avvenire sia per lo strato limite laminare sia per lo strato limite turbolento: in particolare, per uno stesso corpo il punto di separazione si sposta verso monte (cioè la separazione avviene prima) se lo strato limite è laminare in quanto in tale regime la distribuzione delle velocità v_x è maggiormente "predisposta" come mostra la fig. 11.3, a raggiungere la situazione rappresentata dalla eq.ne 11.36.

11.8 - RESISTENZA DEI CORPI IMMERSI IN UN FLUIDO. La resistenza R alla quale è sottoposto un corpo immerso in un fluido e in moto relativo rispetto al fluido stesso (*) è dovuta, in generale:

- alle tensioni tangenziali sulla superficie del corpo che danno luogo ad una forza con una componente in senso contrario al moto (resistenza di attrito);
- alla scia (quando naturalmente si raggiungono le condizioni per la sua presenza) che, provocando uno squilibrio tra le pressioni normali sfavorevole al moto, dà luogo anch'essa ad una forza con una componente in senso contrario al moto (resistenza di scia).

La resistenza di scia, come la resistenza di attrito (**), è funzione del numero di Reynolds Re_L (L è una lunghezza caratteristica del corpo) e dipende dalla forma del corpo che influenza, a parità delle altre condizioni, la posizione dei punti di separazione, di conseguenza, l'estensione della regione di scia; se il corpo è opportunamente profilato tale regione si mantiene, in ogni caso, di dimensioni modeste.

La resistenza R può ancora essere espressa attraverso il coefficiente di resistenza C_R (V. par. 11.5) qui definito dal rapporto

(*) - La situazione considerata è equivalente al fluido in moto relativo rispetto al corpo.

(**) - Per lo strato limite turbolento si considera il regime di parete liscia.

$$(11.37) \quad C_R = \frac{R}{A \rho v_o^2 / 2}$$

in cui A è l'area della proiezione del corpo su un piano normale alla direzione del moto e v_o è la velocità del fluido nella regione di moto uniforme. Nella fig. 11.8 sono riportate le curve $C_R = C_R(Re_D)$ relative ad un cilindro

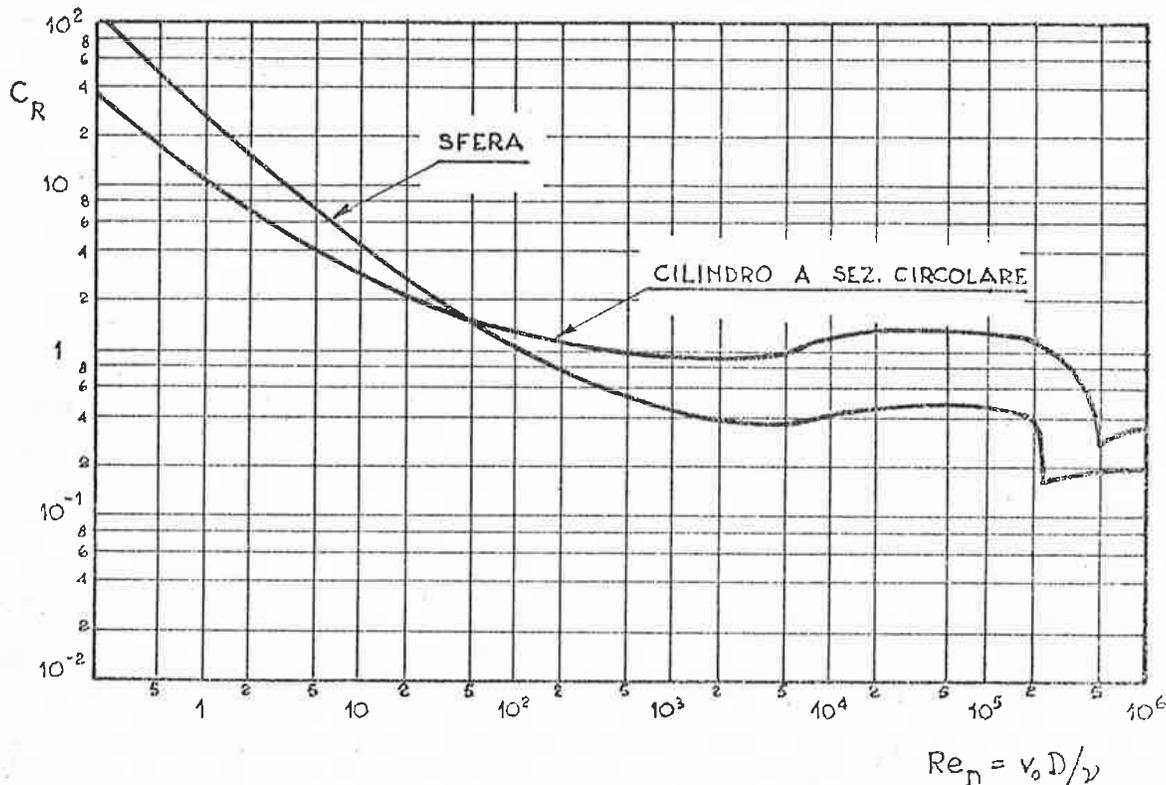


Fig. 11.8

di diametro D e di lunghezza l "infinita" ($l/D > \sim 100$) e ad una sfera di diametro D .

a) Cilindro:

- per $Re_D \leq 1$ lo strato limite laminare non si separa dal cilindro e il coefficiente di resistenza C_R è, con buona approssimazione, inversamente proporzionale a Re_D ;
- per $1 < Re_D \leq 30$ lo strato limite laminare si separa dal cilindro dando luogo a due vortici stazionari a struttura laminare;
- per $30 < Re_D \leq 10^4$ lo strato limite si mantiene interamente laminare; i vortici, pur conservando la struttura laminare, non risultano più stazionari ma si staccano alternativamente dal cilindro (con una frequenza dipendente da Re_D) costituendo due strati vorticosi dotati di una velocità di traslazione rispetto al cilindro stesso (scia vorticoso di v. Kàrman);

- per $10^4 < Re_D \leq 2 \times 10^5$ lo strato limite è ancora laminare mentre i vortici presentano una struttura prevalentemente turbolenta con i due strati vorticosi di difficile individuazione; il coefficiente di resistenza C_R ha un valore praticamente costante e pari a $\sim 1,2$;
- per $2 \times 10^5 < Re_D < 5 \times 10^5$ lo strato limite ha una parte turbolenta la cui estensione aumenta con Re_D ; contemporaneamente i punti di separazione si spostano verso valle (cioè si riduce la regione di scia) e il coefficiente di resistenza C_R diminuisce. Un esempio del campo di moto e della distribuzione delle pressioni sul cilindro è riportato nella fig. 11.9;

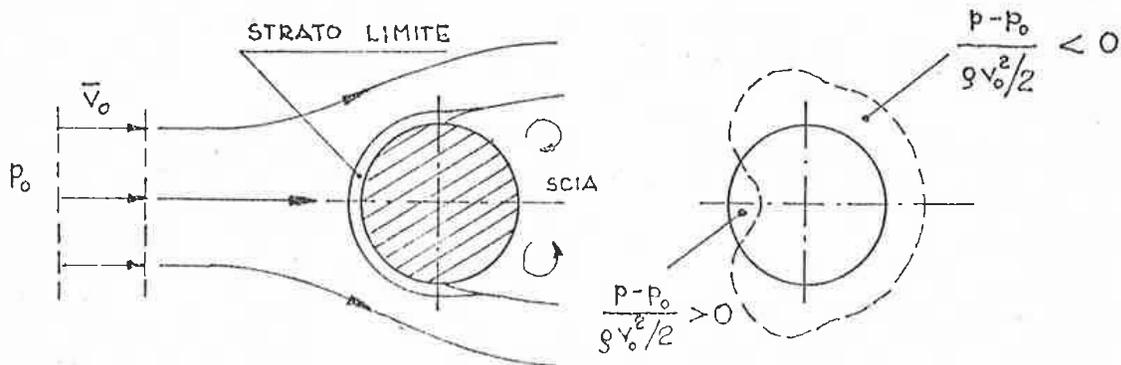


Fig. 11.9

- per $Re_D = 5 \times 10^5$ - numero di Reynolds critico(*) - lo strato limite è interamente turbolento, il coefficiente di resistenza C_R raggiunge il suo valore minimo, pari a $\sim 0,3$, per poi tornare ad aumentare con Re_D mantenendosi comunque al disotto del valore $\sim 0,4$.

b) Sfera:

presenta comportamenti qualitativi analoghi a quelli descritti per il cilindro. Per $Re_D \leq 1$ (strato limite laminare, assenza di separazione) la resistenza R è espressa dalla legge di Stokes

$$R = 3 \pi \mu D v_0$$

e il coefficiente di resistenza C_R risulta

$$C_R = 24/Re_D$$

Il valore del numero di Reynolds critico è pari a $\sim 2 \times 10^5$ cui corrisponde $C_R \simeq 0,18$.

(*) - Il valore del numero di Reynolds critico è influenzato dalla scabrezza della superficie del cilindro e diminuisce all'aumentare di tale scabrezza; il valore riportato corrisponde ad un cilindro "liscio".